KANTON
LUZERN
Bildungs- und Kulturdepartement

Kantonale Fachschaft Mathematik

Repetitionsaufgaben: Lineare Funktionen

Zusammengestellt von Irina Bayer-Krakvina, KSR

Lernziele:

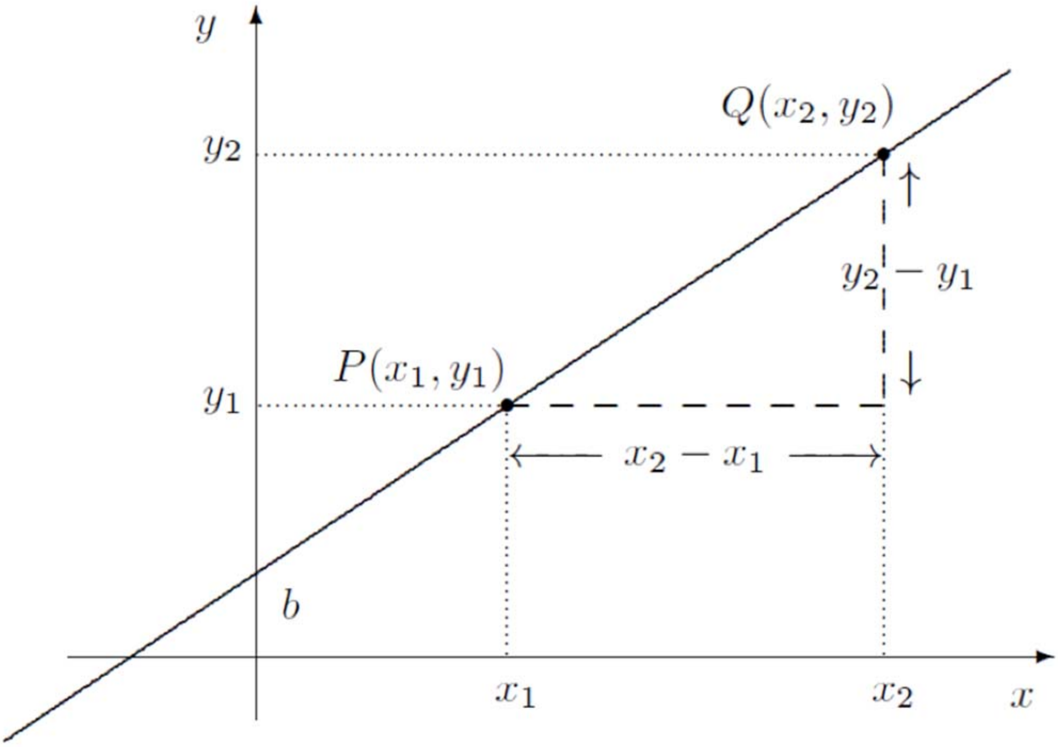
- Wissen, was ein Steigungsdreieck einer Geraden ist und wie die Steigungszahl definiert und berechnet wird.
- Die Koeffizienten m und b einer linearen Funktion an ihrem Graphen ablesen können und umgekehrt mit den Angaben von m und b eine Gerade im Koordinatensystem einzeichnen können.
- Aus der Steigung und einem Punkt die Geradengleichung berechnen können.
- Aus den Koordinaten zweier Punkte die Geradengleichung berechnen können.
- Nachweisen können, dass ein Punkt auf einer gegebenen Gerade liegt.
- Wissen, wann zwei Geraden parallel sind oder senkrecht zueinander stehen.
- Die Geradengleichung einer Geraden bestimmen können, die parallel oder senkrecht zu einer gegeben Geraden liegt und die durch einen gegebenen Punkt geht.
- Den Schnittpunkt von zwei Geraden berechnen können.
- Angewandte Situationen mit Hilfe einer linearen Funktion beschreiben können.
- Textaufgaben mit linearen Funktionen lösen können.

A. Definitionen, Bezeichnungen. Eigenschaften von linearen Funktionen

- Die Funktion $x \to mx + b$ mit $m, \in \mathbb{Q}$ heisst lineare Funktion.
- Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ist $\mathbb{R}$ oder eine Teilmenge davon.
- Die Funktionsgleichung ist $y=f(x) = mx+b$.
- Der Graph einer linearen Funktion $f: x \to mx+b$ ist eine Gerade mit der Gleichung $y = mx+b$.
- Für $x=0$ ergibt sich durch Einsetzen $y = m \cdot 0+b = b \Rightarrow$ Die Gerade geht durch $(0 \mid b)$.
  Man nennt b deshalb auch den y-Achsenabschnitt.

  Für $b>0$ passiert die Gerade die $y-$ Achse oberhalb, für $b<0$ unterhalb des Ursprungs. Für $b = 0$ verläuft die Gerade durch den Koordinatenursprung.

B. Steigungszahl und Steigungsdreieck



Da P und Q auf der Geraden liegen, müssen deren Koordinaten der Geradengleichung y = mx+b genügen. Also:

$$y_1 = mx_1 + b, \quad y_2 = mx_2 + b$$

Daraus folgt nun:

$$y_2 - y_1 = (mx_2 + b) - (mx_1 + b) = mx_2 + b - mx_1 - b = m(x_2 - x_1)$$

Und nach m aufgelöst:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad oder \;\; m = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

m ist das Verhältnis der vertikalen Kathete zur horizontalen Kathete im Steigungsdreieck.
m wird Steigungszahl der Geraden genannt.

Der Graph einer linearen Funktion ist durch zwei Punkte bestimmt.

Aufgaben

1. Zeichne den Graphen der Funktion $y = -\frac{1}{2}x - 1$ mit Hilfe von zwei Punkten.
2. Zeichne die Geraden g und h mit Hilfe des y-Achsenabschnitts und eines Steigungsdreiecks.

   g: $y = \frac{3}{4}x - 1$ h: $y = -2x + 4$
3. Zeichne die Gerade mit der Steigung $m = \frac{3}{2}$, die durch den Punkt $P(2|1)$ geht.

4. Zeichne die Gerade mit der Steigung $m = -\frac{1}{4}$, die durch den Punkt $P(6|2)$ geht.

5. Liegen die Punkte $P(2 \mid -5)$ und $Q(-2 \mid 6)$ auf der Geraden $g: y = -3x + 1$?

Bestimmung der Geradengleichung aus einem Punkt und der Steigung:

6. Eine Gerade geht durch $\mathrm{P}(-2 \mid 1)$ und hat die Steigung $m = -1$.
   Bestimme die Geradengleichung.

7. Eine Gerade g geht durch den Punkt $P(-2|3)$ und hat die Steigung $m = \frac{3}{4}$.
   Bestimme die Geradengleichung.

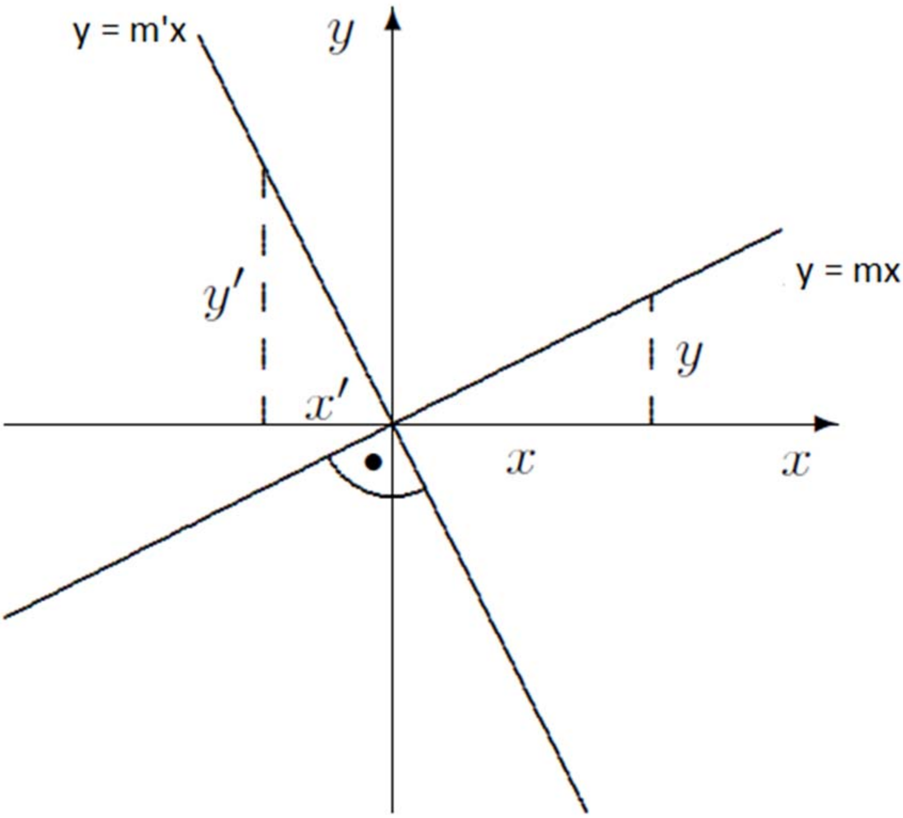
Bestimmung der Geradengleichung aus zwei Punkten:

8. Eine Gerade geht durch $\mathrm{P}(-1 \mid -2)$ und $\mathrm{Q}(-3 \mid 1)$. Bestimme die Geradengleichung

9. Eine Gerade g geht durch die Punkte $P(2|4)$ und $Q(3|7)$. Bestimme die Geradengleichung.

C. Parallele und senkrechte Geraden

Parallele Geraden haben dieselbe Steigung m, aber unterschiedliche y-Achsenabschnitte.
Bei senkrechten Geraden besteht ebenfalls ein Zusammenhang zwischen den Steigungen:



Die Steigungsdreiecke sind deckungsgleich. Es gilt dann: $x' = -y \text{ und } y' = x$

Für die Steigung m' gilt: $m' = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} = -\frac{1}{m}$

Erste Formel: $m' = -\frac{1}{m}$ Die Steigungen von senkrechten Geraden sind negativ reziprok.

Zweite Formel: $m' \cdot m = -1$. Das Produkt der Steigungen von zwei senkrechten Geraden ist –1.

Beispiele:

a) $g_1: y = 3x + 1 \implies g_2: y = -\frac{1}{3}x - 4 \; mit \; g_1 \perp g_2$

b) $g_1: y = -\frac{2}{3}x - 2 \implies g_2: y = \frac{3}{2}x + 3 \; mit \; g_1 \perp g_2$

Die y-Achsenabschnitte können beliebig gewählt werden.

Aufgaben

10. a) Bestimme die Gleichung der Geraden h, die durch den Punkt $P(-3|4)$ geht und zu der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{3}{2}x - 1$ parallel ist.

    b) Bestimme die Gleichung der Geraden h, die durch den Punkt $P(2|-3)$ geht und zu der Geraden g mit der Gleichung $y = -\frac{2}{3}x + 4$ senkrecht steht.

11. Gegeben ist die Geradengleichung f: y = 0.5x - 3.

    a) Gib die Gleichung der zu f parallelen Geraden h an, welche durch den Punkt $P(2|1)$ geht.

    b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes von h mit der x- Achse.

D. Schnittpunkt von zwei Geraden

Wir betrachten zwei Geraden $g \; und \; h$ in der Koordinatenebene. Dabei gibt es grundsätzlich drei Möglichkeiten

- die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt S, dem Schnittpunkt
- die beiden Geraden schneiden sich nicht, das heisst sie sind parallel
- die beiden Geraden liegen aufeinander

Aufgaben

12. Gegeben sind zwei Geraden $\mathrm{g}: \mathrm{y} = -2\mathrm{x} + 5$ und $\mathrm{h}: \mathrm{y} = \mathrm{x} - 1$.
    Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden.

    Beachte die ausführliche Musterlösung zur Aufgabe 12 im Lösungsteil.

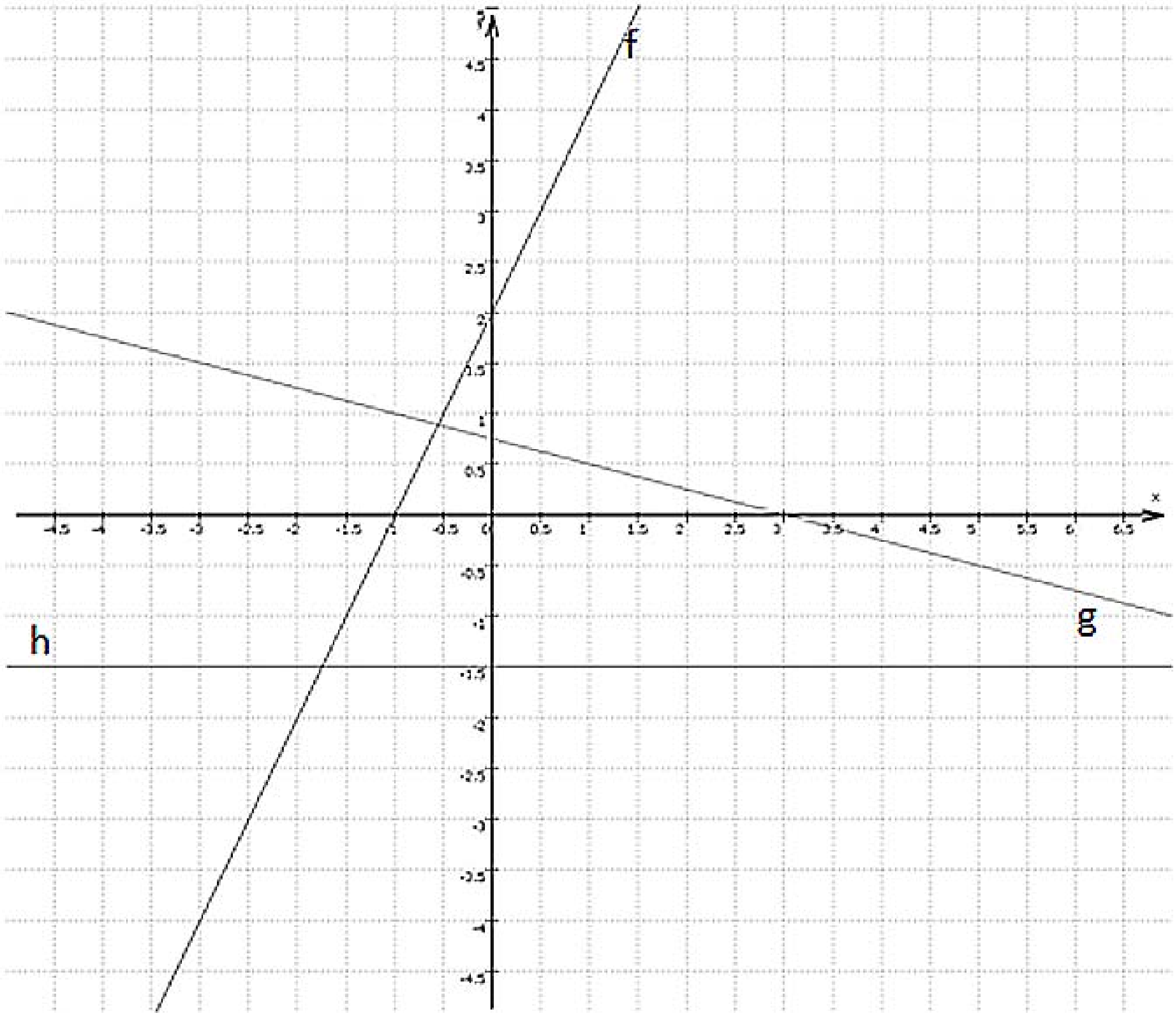
13. Berechne den Schnittpunkt von $\mathrm{y} = -\frac{1}{3}\mathrm{x} + 4$ und $\mathrm{y} = -\frac{1}{2}\mathrm{x} - 2$

14. Berechne den Schnittpunkt von $\mathrm{y} = 3\mathrm{x} + 1$ und $\mathrm{y} = 3\mathrm{x} - 7$

15. Berechne den Schnittpunkt von $\mathrm{y} = 3\mathrm{x} + 1$ und $\mathrm{y} = 3\mathrm{x} + 1$

16. a) Gib Gleichungen für die auf der nächsten Seite eingezeichneten Geraden f, g und h an.

    b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden g und h.



17. Gegeben ist die Gerade g:$y = \frac{3}{5}x + 1$ und der Punkt P$(-1|-4)$.

   a) Wie lautet die Gleichung der Geraden h, welche parallel zu g ist und durch P geht?

   b) Die Gerade i schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0 = \frac{74}{15}$ und die Gerade g an der Stelle $x_1 = 2$. Wie lautet die Gleichung von i?

18. Zeichne die Graphen G_f und G_g der folgenden Funktionen in dasselbe Koordinatensystem und berechne anschliessend die Koordinaten ihrer Schnittpunkte.

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 4 \\ -0.5x + 9 & x > 4 \end{cases} \qquad y = g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

19. Berechne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD des Vierecks ABCD mit A(6|2), B(1|7), C(-3|-1) und D(4|-2).

20. Gegeben sind die Geraden g: y = 1 und h: y = 3x – 5 sowie die Gerade i, welche durch die Punkte P(2/10) und Q(8/1) geht.

   a) Zeichne die drei Geraden g, h und i in ein Koordinatensystem ein.

   b) Wie lautet die Gleichung der Geraden i?

   c) Berechne die Schnittpunkte A von g mit h, B von g mit i und C von h mit i.

   d) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

E. Angewandte Aufgaben

21. Die Familie Meier fordert Offerten für eine Heizungsreparatur ein. Firma A berechnet für die Fahrtkosten Fr. 42.- und für jede Arbeitsstunde 76.-. Bei der Firma B sind die Fahrtkosten Fr. 35.- und jede Arbeitsstunde wird mit Fr. 80.- berechnet.

    a) Welche Kosten entstehen für beide Firmen, wenn eine Monteurin 3.5 Stunden für die Arbeit benötigt? Welche Firma ist in diesem Fall kostengünstiger?

    b) Wie lauten die Gleichungen derjenigen zwei linearen Funktionen, die jeder Arbeitszeit x (in Stunden) die entstehenden Kosten y (in Franken) zuordnet?

    c) Berechne, bei welcher Arbeitszeit die Kosten bei beiden Firmen gleich sind.

22. Taxifahrer A verlangt eine Grundtaxe von Fr. 6.50 und pro gefahrenen Kilometer Fr. 1.90. Taxifahrer B verlangt eine Grundtaxe von Fr. 8.50 und pro gefahrenen Kilometer Fr. 1.80.

    a) Ermittle für beide Taxifahrer die Gleichung der Funktion, die die jeweiligen Fahrtkosten abhängig von der gefahrenen Strecke angibt.

    b) Welche Taxifahrt ist bei einer Strecke von 8 km günstiger?

    c) Für welche Strecke (in km) kosten beide Taxifahrten gleich viel?

23. Ein Mobilfunkanbieter macht folgendes Angebot: Ein Monatsabonnement für ein Handy kostet 10 Fr. Grundgebühr. In der Grundgebühr sind pro Monat 20 Gratis-SMS enthalten. Jede weitere SMS kostet 20 Rappen. Wir nehmen an, dass Werner ein solches Abo löst und sein Handy nur für SMS benützt.

    Karl hat hingegen ein anderes Angebot genutzt. Er bezahlt gar keine Grundgebühr, jede SMS kostet ihn aber 35 Rappen.

    a) Stelle den Verlauf der monatlichen Kosten für beide Angebote graphisch in einem Koordinatensystem dar. (x-Achse: Anzahl SMS, y-Achse: Kosten in Fr.)
    Für beide Achsen gilt: 2 Häuschen entsprechen 5 Einheiten.

    b) Ermittle die Funktionsgleichung der linearen Funktion der Monatskosten von Werner für $x \geq 20$, also nur für den Fall, dass er mehr als die 20 Gratis-SMS pro Monat versendet. Ermittle auch die Funktionsgleichung der Monatskosten von Karl.

    c) Für welche bestimmte Anzahl gesendete SMS bezahlen Werner und Karl gleich viel? Wie viel müssen sie dann bezahlen? (Berechnung!)

F Lösungen aller Aufgaben

1. Zeichne den Graphen der Funktion $y = -\frac{1}{2}x - 1$ mit Hilfe von zwei Punkten.

Lösung: Grundsätzlich müssen die Koordinaten von zwei Punkten bestimmt werden, um die Gerade zeichnen zu können. Man muss aber nur noch die Koordinaten eines Punkt berechnen, da mit dem y-Achsenabschnitt der Punkt $(0|-1)$ schon bekannt ist.

Wähle zum Beispiel $x = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = -3 \Rightarrow (4 \mid -3)$

Die Gerade geht also durch $(0 \mid -1)$ und $(4 \mid -3)$

2. **Zeichne die Geraden g: $y = \frac{3}{4}x - 1$ und h: $y = -2x + 4$**

Lösung: $g: y = \frac{3}{4}x - 1;\ \ P(0|-1)\ \in\ G_g\ (-1\ ist\ \mathrm{y-Achsenabschnitt}).$

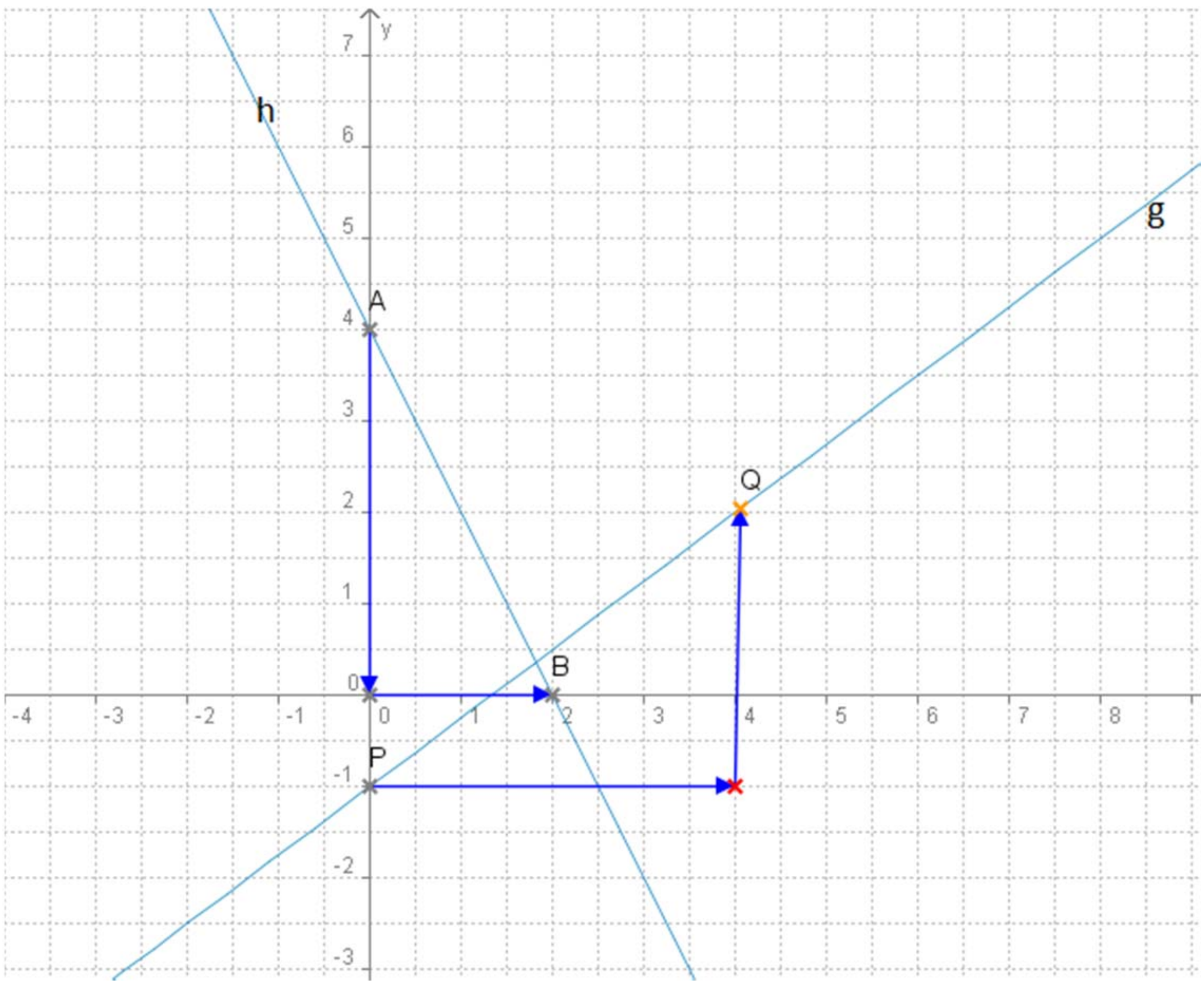
Es gilt für die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{4}$, also wählen wir $\Delta x = 4\ und\ \Delta y = 3$.

Den zweiten Punkt Q der Geraden g erhalten wir, indem wir von P aus zuerst 4 Einheiten nach rechts und drei Einheiten nach oben (positive y-Richtung) gehen.

$h: y = -2x + 4\,; A(0|4)\ \in\ G_h\ (4\ ist\ \mathrm{y-Achsenabschnitt});$

Es gilt für die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{1} = \frac{-2}{1}$ also wählen wir $\Delta x = 1\ und\ \Delta y = -2$.

Den zweiten Punkt B der Geraden h erhalten wir, indem wir von A aus zuerst eine Einheit nach rechts und zwei Einheiten nach unten (negative y-Richtung) gehen. Eingezeichnet ist aber ein grösseres Steigungsdreieck mit $\Delta x = 2\ und\ \Delta y = -4$.

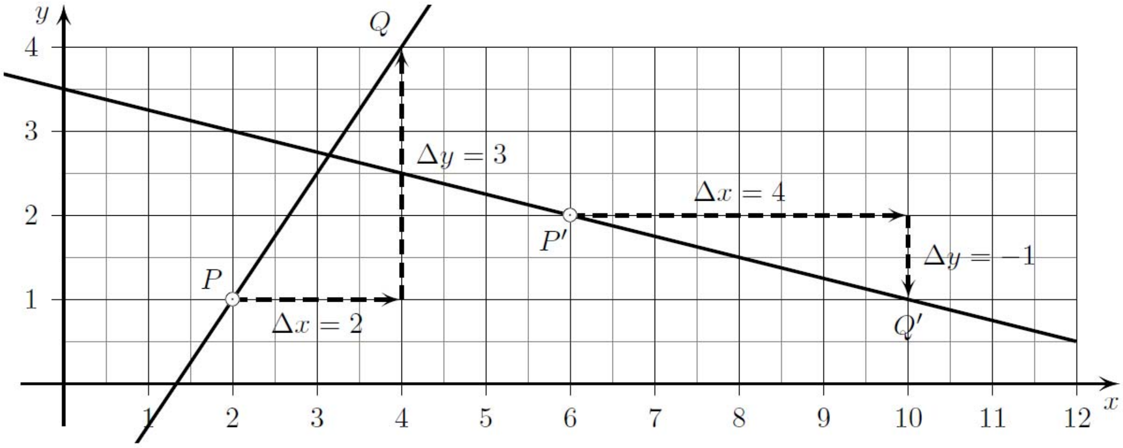


3. **Zeichne die Gerade mit der Steigung $m = \frac{3}{2}$, die durch den Punkt $P(2|1)$ geht.**

Lösung: Es gilt für die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2}$. Damit ist $\Delta x = 2\ und\ \Delta y = 3$.

Wir müssen also zuerst waagrecht um 2 Einheiten nach rechts gehen (positive x-Richtung) und dann 3 Einheiten nach oben (positive y-Richtung). Auf diese Weise erhalten wir neben P einen zweiten Punkt Q auf der Geraden, nämlich Q(4/4).

Siehe den Graph auf der nächsten Seite.



4. Zeichne die Gerade mit der Steigung $m = -\frac{1}{4}$, die durch den Punkt $P(6|2)$ geht.

Lösung: Es gilt für die Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4}$

Hier haben wir die Wahl, ob wir das Minus in den Zähler oder Nenner nehmen. Es spielt keine Rolle, welche Wahl wir treffen. Das Minus nehmen wir in der Zähler.

So erhalten wir $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$ und $\Delta x = 4 \; und \; \Delta y = -1$.

Den zweiten Punkt der Geraden erhalten wir, indem wir von P' aus zuerst 4 Einheiten nach rechts und eine Einheit nach unten (negative y-Richtung) gehen. (siehe oben)

***5.* Liegen die Punkte $P(2 \mid -5)$ und $Q(-2 \mid 6)$ auf der Geraden $g\colon y = -3x + 1$?**

Lösung: Damit die Punkte auf der Geraden liegen, müssen deren Koordinaten die Geradengleichung erfüllen. Dazu setzt man die Koordinaten der entsprechenden Punkte in die Geradengleichung ein:

$P\colon -5 = -3 \cdot 2 + 1 = -5, \qquad Q\colon 6 \neq -3 \cdot (-2) + 1 = 7$

Somit erfüllen die Koordinaten von P die Geradengleichung von $g \Rightarrow P \in g$.
Die Koordinaten von Q erfüllen die Geradengleichung nicht $\Rightarrow Q \notin g$

***6.* Eine Gerade geht durch $P(-2 \mid 1)$ und hat die Steigung $m = -1$. Geradengleichung?**

Lösung: Mit $m = -1$ wird die Funktionsgleichung $y = -x + b$. Da P auf der Geraden liegt, müssen die Koordinaten von P die Geradengleichung erfüllen. Man setzt also die Koordinaten von P in die Gleichung ein und löst sie nach b auf:

$1 = -(-2) + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = -x - 1$

7. Eine Gerade g geht durch $P(-2|3)$ und hat die Steigung $m = \frac{3}{4}$. Geradengleichung?

Lösung: Die Geradengleichung hat die Form $g\colon y = mx + b$ und wir müssen die Koeffizienten $m \; und \; b$ bestimmen. Ansatz für g: $y = \frac{3}{4}\mathrm{x} + \mathrm{b}$

Wir müssen b berechnen. Dies erreichen wir, indem wir die Koordinaten von $P(-2|3)$ in den Ansatz einsetzen und nach b auflösen. Da der Punkt auf der Geraden liegen muss, müssen seine Koordinaten auch die Geradengleichung erfüllen.

$3 = \frac{3}{4} \cdot (-2) + b \Rightarrow b = \frac{9}{2} \Rightarrow g\colon y = \frac{3}{4}\mathrm{x} + \frac{9}{2}.$

8. Eine Gerade geht durch $\mathbf{P(-1 \mid -2)}$ und $\mathbf{Q(-3 \mid 1)}$. Bestimme die Geradengleichung.

Lösung: Für die Steigung gilt: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{1-(-2)}{-3-(-1)} = -\frac{3}{2}$

Ansatz für die Geradengleichung: $y = -\frac{3}{2}x + b$

Nun setzt man die Koordinaten eines der gegebenen Punkte in die Gleichung ein und löst sie nach b auf:

$$P:\ -2 = -\frac{3}{2}(-1) + b \ \Rightarrow b = \ -\frac{7}{2} \ \Rightarrow \ y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$Q:\quad 1 = \ -\frac{3}{2}(-3) + b \ \Rightarrow \ b = -\frac{7}{2} \ \Rightarrow \ y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$$

Man sieht also, dass es keine Rolle spielt, welchen Punkt man für die Berechnung von b verwendet.

9. Eine Gerade g geht durch $\boldsymbol{P(2|4)}$ und $\boldsymbol{Q(3|7)}$. Bestimme die Geradengleichung.

Lösung: Es gilt wieder, m und b in der Gleichung von $g: y = mx + b$ zu bestimmen.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-4}{3-2} = 3.$$

Noch b bestimmen: $P \in G_g \Rightarrow 4 = 3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -2 \ \Rightarrow g: y = 3x - 2.$

10. a) Gerade h durch den Punkt $\boldsymbol{P(-3|4)}$ und parallel zur Geraden $\boldsymbol{g: y = \frac{3}{2}x - 1}$.

b) Gerade h durch den Punkt $\boldsymbol{P(2|-3)}$ und senkrecht zur Geraden $\boldsymbol{g: y = -\frac{2}{3}x + 4}$.

Lösung: a) $g \parallel h \ \Rightarrow \ m_h = \frac{3}{2} \Rightarrow \ g: y = \frac{3}{2}x + b;$ P$\in G_h \Rightarrow 4 = \frac{3}{2} \cdot (-3) + b \Rightarrow b = \frac{17}{2};$

$h: \ y = \frac{3}{2}x + \frac{17}{2}.$

b) $g \perp h \ \Rightarrow \ m_h = \frac{3}{2} \Rightarrow g: y = \frac{3}{2}x + b;$ P$\in G_h \Rightarrow -3 = \frac{3}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = -6;$

$h: y = \frac{3}{2}x - 6.$

11. a) Gesucht ist die Parallele h zur Geraden f: y = 0.5x – 3 durch den Punkt $\boldsymbol{P(2|1)}$

b) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes von h mit der x- Achse.

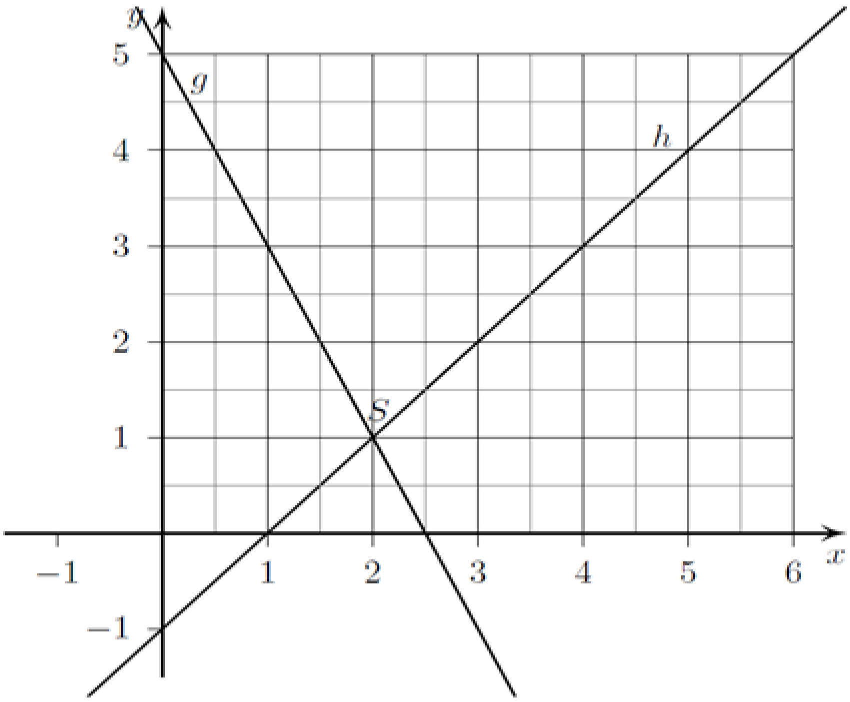
Lösung: a) Da $h \parallel f \ \Rightarrow \ m_h = \frac{1}{2} \ \Rightarrow h: y = \frac{1}{2}x + b;$ P $\in G_h \ \Rightarrow \ 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 0$

$h: y = \frac{1}{2}x.$

b) Die x-Achse hat die Gleichung y = 0; $\frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \ \Rightarrow$ S$(0|0)$.

12. Gegeben sind zwei Geraden $\mathbf{g: y = -2x + 5}$ und $\mathbf{h: y = x - 1}$.
Bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Lösung: Wir können natürlich die Graphen dieser Geraden zeichnen und den Schnittpunkt aus der Skizze (s. nächste Seite) herauslesen.



Der Schnittpunkt S der beiden Geraden scheint $(2|1)$ zu sein.

Wir wissen aber nicht, ob er auch exakt an dieser Stelle ist. Um dies herauszufinden müssen wir den Schnittpunkt berechnen. Der Schnittpunkt muss beide Gleichungen erfüllen. Der y-Wert muss in beiden Gleichungen übereinstimmen. Somit erhalten wir den Schnittpunkt, indem wir die Gleichungen gleichsetzen und nach x auflösen:

$-2x + 5 \ = x - 1 \Rightarrow x = 2$

Damit ist die x - Koordinate $x = 2$.

Wenn wir diesen Wert in einer der beiden Geradengleichungen einsetzen, erhalten wir als y- Koordinate $y = \ -2 \cdot 2 + 5 = 1$.

Zur Kontrolle sollen diese Daten auch in die andere Gleichung eingesetzt werden.

Einsetzen der Koordinaten in h: y = x – 1 ergibt 1 = 2 – 1 . Diese Aussage stimmt.

Der Schnittpunkt S hat also tatsächlich die Koordinaten $(2|1)$.

13. Berechne den Schnittpunkt von $\mathbf{y = -\frac{1}{3}x + 4}$ und $\mathbf{y = -\frac{1}{2}x - 2}$

Lösung: Gleichungen gleichsetzen: $-\frac{1}{3}x + 4 \ = -\frac{1}{2}x - 2 \quad \Rightarrow x = \ -36$

$x = \ -36$ in eine der beiden Geradengleichung einsetzen und nach y auflösen:

$y = -\frac{1}{3} \cdot (-36) + \ 4 = 16 \Rightarrow$ Schnittpunkt: S$(-36|16)$.

14. Berechne den Schnittpunkt von $\mathbf{y = 3x + 1}$ und $\mathbf{y = 3x - 7}$

Lösung: Da die beiden Steigungen gleich und die y-Achsenabschnitte verschieden sind, sind beide Geraden parallel und verschieden. Sie haben somit keinen Schnittpunkt.

Setzt man die Gleichungen trotzdem gleich, so erhält man: $3x + 1 = 3x - 7$ oder $1 = -7$. Es gibt also kein x, für das beide Gleichungen erfüllt sind. Die beiden Geraden haben also keine gemeinsamen Punkte.

15. Berechne den Schnittpunkt von $\mathbf{y = 3x + 1}$ und $\mathbf{y = 3x + 1}$

Lösung: Da die beiden Steigungen gleich sind und die y-Achsenabschnitte gleich sind, sind auch die beiden Geraden gleich. Sie haben somit unendlich viele Schnittpunkte.

Setzt man die Gleichungen trotzdem gleich, so erhält man: $3x + 1 = 3x + 1 \ \Leftrightarrow 1 = 1$, Die beiden Gleichungen sind also für alle x erfüllt. Es gibt unendlich viele Lösungen.

16. a) Gib die Gleichungen für die Geraden f, g und h an.
b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden g und h.

Lösung: a) $h: y = -1.5$

$f: 2\ ist\ \text{y} - \text{Achsenabschnitt} \Rightarrow y = mx + 2;\ m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2\ \Rightarrow f:\ y = 2x + 2;$

Die Gerade g geht durch $\text{P}(-1|1)$und $\text{Q}(3|0) \Rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{3-1} = -\frac{1}{4};$

$\Rightarrow\ g:\ y = -\frac{1}{4}x + b$; Q$\in G_g \Rightarrow 0 = -\frac{1}{4} \cdot 3 + b \Rightarrow b = \frac{3}{4} \Rightarrow g:\ y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$

b) S = f ∩ h : $-1.5 = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ ⇒ x = 9 und y = -1.5 ⟹ $S(9|-1.5)$

17. Gegeben ist die Gerade g: $\mathbf{y = \frac{3}{5}x + 1}$ und der Punkt P$\mathbf{(-1|-4)}$.

a) Wie lautet die Gleichung der Geraden h, welche parallel zu g ist und durch P geht?

b) Die Gerade i schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0 = \frac{74}{15}$ und die Gerade g an der Stelle $x_1 = 2$. Wie lautet die Gleichung von i?

Lösung: a) $Da\ g \parallel h\ \Rightarrow\ m_h = \frac{3}{5}$; h: $y = \frac{3}{5}x + b$ P$\in G_h\ \Rightarrow\ -4 = \frac{3}{5}(-1) + b\ \Rightarrow\ b = -\frac{17}{5}$

$h:\ y = \frac{3}{5}x - \frac{17}{5}$

b) $x_0\ ist\ die\ Nullstelle\ der\ Geraden\ i\ \Rightarrow P_0(\frac{74}{15}|0) \in i$

$P_1\,(2/g(2))\ \ g(2) = \frac{3}{5} \cdot 2 + 1 = \frac{11}{5} \Rightarrow P_1\,(2/2.2).$

$m_i = \frac{\frac{11}{5} - 0}{2 - \frac{74}{15}} = -\frac{3}{4}\ \Rightarrow i: y = -\frac{3}{4}x + b;\ 2.2 = -\frac{3}{4} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3.7\ \Rightarrow\ i: y = -\frac{3}{4}x + 3.7$

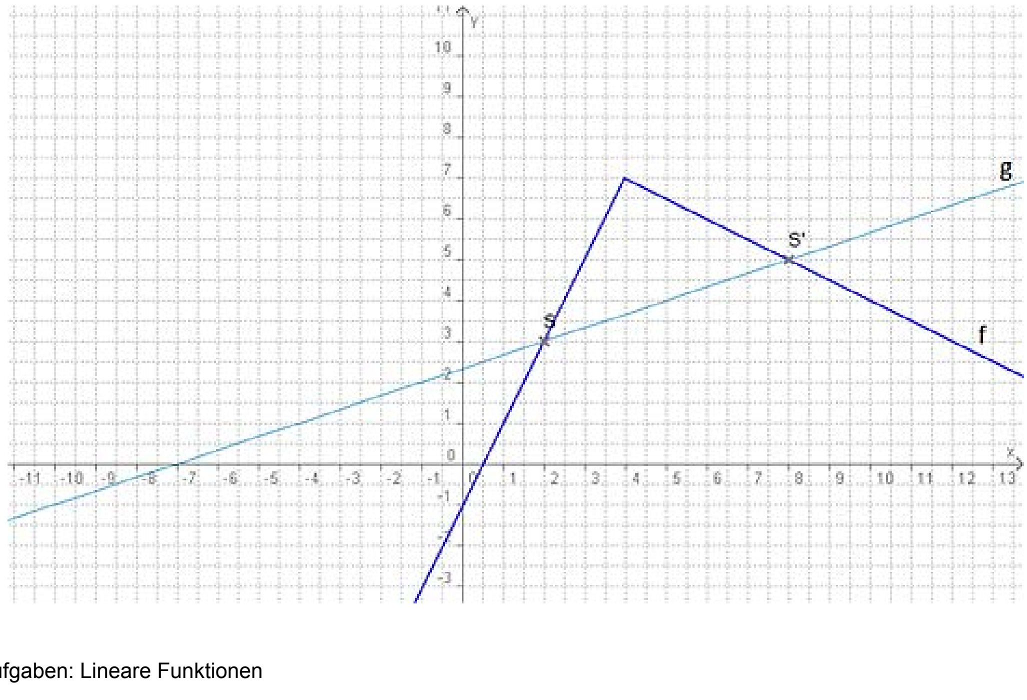
18. Zeichne die Graphen und berechne die Koordinaten ihrer Schnittpunkte.

$$\boldsymbol{y = f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \le 4 \\ -0.5x + 9 & x > 4 \end{cases}} \qquad \boldsymbol{y = g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}$$

Lösung: $S = f \cap g;\ Ansatz\ f(x) = g(x);$

$Für\ x \le 4:\quad \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 2x - 1 \Rightarrow x = 2\,.\quad y = g(2) = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{7}{3} = 3\quad \Rightarrow\quad S(\ 2|3)\,.$

$Für\ x > 4:\quad -0.5x + 9 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow\ S'(\ 8|5).$



19. Berechne den Diagonalenschnittpunkt im Viereck A(6|2) B(1|7) C(-3|-1) D(4|-2).

Lösung: Diagonale AC: g = (AC): $y = mx + b$; $m = \frac{-1-2}{-3-6} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ y = $\frac{1}{3}$x + b

C(-3|-1)∈ $G_g \Rightarrow -1 = \frac{1}{3} \cdot (-3)$+b ⇒ b=0 ; $g: y = \frac{1}{3}x.$

Diagonale BD: h = (BD): $y = mx + b$; $m = \frac{-2-7}{4-1} = -3 \Rightarrow y = -3x + b$;

$D(4|-2) \in G_h \Rightarrow -2 = -3 \cdot 4 + b \Rightarrow b = 10; h: y = -3x + 10.$

Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD: $S = g \cap h$;

$-3x + 10 = \frac{1}{3}x \quad \Rightarrow x = 3; \quad y = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1; \quad S(3|1).$

20. Gegeben sind die Geraden g: y = 1, h: y = 3x – 5 sowie i = (P(2/10) , Q(8/1)).

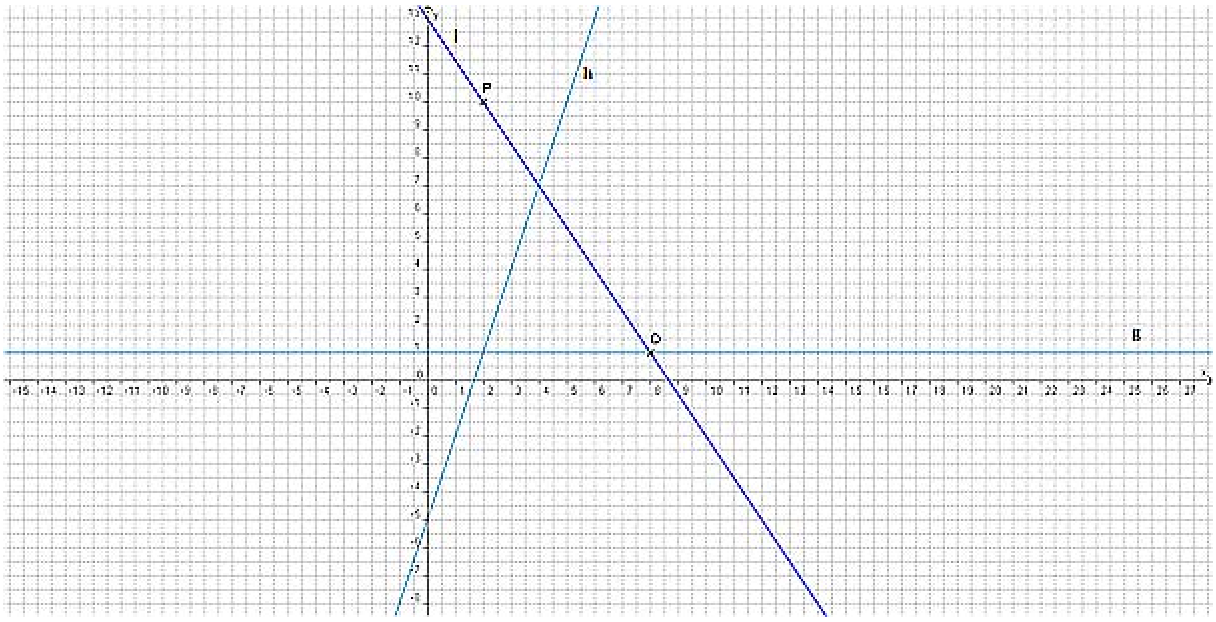
a) Zeichne die drei Geraden g, h und i in ein Koordinatensystem ein.

b) Wie lautet die Gleichung der Geraden i?

c) Berechne die Schnittpunkte A von g mit h, B von g mit i und C von h mit i.

d) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

Lösung: a)



b) Steigung m von i: m =$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}$

i: y = -1.5x + b ; P ∈ G_i: 10 = $-\frac{3}{2} \cdot 2$ + b, also b = 13 ⇒ i: y = -1.5x + 13

c) für A: y = 3x – 5 = 1, also x = 2, daher A(2/1)

für B: Da die y-Koordinate von Q gleich 1 ist, ist B = Q(8/1)

für C: y = 3x – 5 = -1.5x + 13; 4.5x = 18, also x = 4, y = 7, daher C(4/7)

d) Aus den Koordinaten von A, B und C: Die Grundlinie AB des Dreiecks hat die Länge 6, die Höhe darauf ebenfalls die Länge 6.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist daher 18.

21. Die Familie Meier fordert Offerten für ihre Heizungsreparatur ein.

Lösung: a) 3.5 Stunden Arbeit:
Firma A: $42 + 3.5 \cdot 76 = 308.-$

Firma A ist günstiger, nämlich:
Firma B: $35 + 3.5 \cdot 80 = 315.-$

b) Firma A: $y = f(x) = 76x + 42$; Firma B : $y = g(x) = 80x + 35$;

c) Vergleiche : $f(x) = g(x)$; $76x + 42 = 80x + 35 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$.
$Für\ 1\frac{3}{4}\ h\ Arbeit\ sind\ die\ Kosten\ gleich, nämlich\ Fr. 175.-$.

**22. Taxifahrer A verlangt eine Grundtaxe von Fr. 6.50 und Fr. 1.90 pro Kilometer.
Taxifahrer B verlangt eine Grundtaxe von Fr. 8.50 und Fr. 1.80 pro Kilometer.**

Lösung: a) x: Anzahl gefahrene Kilometer; y: Fahrtkosten in Fr.
Kostenfunktion des 1. Taxifahrers: y = 1.9x + 6.5 ,
Kostenfunktion des 2. Taxifahrers: y = 1.8x + 8.5

b) 1.9 ·8 + 6.5 = 21.70 , 1.8 ·8 + 8.5 = 22.90.
Bei 8 km ist Taxifahrer A mit Fr. 21.70 günstiger.

c) 1.9x + 6.5 = 1.8x + 8.5 ⇒ 0.1x = 2 ⇒x = 20. Für 20 km kosten beide gleich viel.

23. Ein Mobilfunkanbieter macht folgendes Angebot:
Ein Monatsabonnement für ein Handy kostet 10 Fr. Grundgebühr. In der Grundgebühr sind pro Monat 20 Gratis-SMS enthalten. Jede weitere SMS kostet 20 Rappen. Wir nehmen an, dass Werner ein solches Abo löst und sein Handy nur für SMS benützt.

Karl hat hingegen ein anderes Angebot genutzt. Er bezahlt gar keine Grundgebühr, jede SMS kostet ihn aber 35 Rappen.

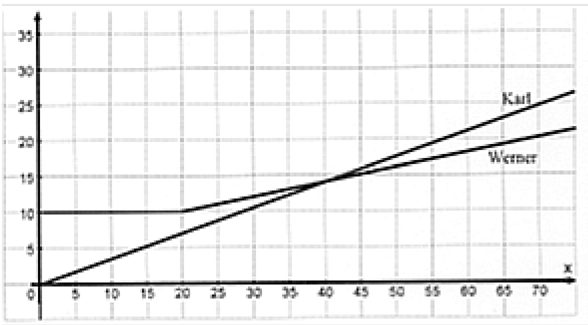
a) Stelle den Verlauf der monatlichen Kosten für beide Angebote graphisch in einem Koordinatensystem dar. (x-Achse: Anzahl SMS, y-Achse: Kosten in Fr.)
Für beide Achsen gilt: 2 Häuschen entsprechen 5 Einheiten)

b) Ermittle die Funktionsgleichung der linearen Funktion der Monatskosten von Werner für x ≥ 20, also nur für den Fall, dass er mehr als die 20 Gratis-SMS pro Monat versendet. Ermittle auch die Funktionsgleichung der Monatskosten von Karl.

c) Für welche bestimmte Anzahl gesendete SMS bezahlen Werner und Karl gleich viel? Wie viel müssen sie dann bezahlen? (Berechnung!)

Lösung: a) Werner: bis 20 SMS waagrecht bei 10 Fr., anschliessend linear steigend, +2 Fr. pro 10 SMS

Karl: 0 SMS → 0 Fr.,
+7 Fr. pro 20 SMS



b) x: Anzahl SMS
y: Monatskosten in Fr.

Werner: m = 0.2 ⇒ y = 0.2x + b
A(20|10): 10 = 0.2·20 + b ⇒ b = 6
⇒ y = 0.2x + 6 (gilt nur für x ≥ 20)

Karl: m = 0.35, b = 0 ⇒ y = 0.35·x

c) 0.2·x + 6 = 0.35x ⇒ 6 = 0.15·x ⇔ $x = \frac{6}{0.15} = 40$ ⇒ y = 0.35·40 = 14.
Es sind je 40 gesendete SMS und sie müssen beide 14 Fr. bezahlen.